

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIU DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES, LXIX

RAMON LAPIEDRA

De la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques
i Matemàtiques

LES EQUACIONS DE LA MECÀNICA
RELATIVISTA PREDICTIVA.
UNA FAMÍLIA DE SOLUCIONS

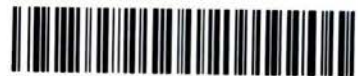
*I BORSA D'ESTUDI "SOCIETAT CATALANA DE
CIÈNCIES FÍSiques, QUÍMIQUES I MATEMÀTIQUES", 1972*

BARCELONA

1983

LES EQUACIONS DE LA MECÀNICA RELATIVISTA PREDICTIVA.
UNA FAMÍLIA DE SOLUCIONS

This One



YUH5-KTN-XBS5

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIU DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES, LXIX

RAMON LAPIEDRA

De la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques
i Matemàtiques

LES EQUACIONS DE LA MECÀNICA
RELATIVISTA PREDICTIVA.
UNA FAMÍLIA DE SOLUCIONS

*I BORSA D'ESTUDI "SOCIETAT CATALANA DE
CIÈNCIES FÍSiques, QUÍMIQUES I MATEMÀTIQUES", 1972*

BARCELONA

1983

**EL SENYOR A.E. I S.
HA CONTRIBUÏT GENEROSAMENT
A L'EDICIÓ D'AQUEST ESTUDI**

I.S.B.N.: 84-7283-048-9

Dipòsit legal: B. 1.914-1984

© Ramon Lapiedra i Civera, València

La present edició és propietat de l'INSTITUT d'ESTUDIS CATALANS

A proposta d'una ponència formada pels senyors Lluís Solé i Sabarís i Josep Teixidor i Batlle, membres de la Secció de Ciències de l'INSTITUT, i els senyors Joan Casulleras, Joan Oliveras i Lluís Mas, de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques, l'INSTITUT d'ESTUDIS CATALANS, en sessió plenària tinguda el dia 29 de desembre de 1971, acordà per unanimitat d'adjudicar la I Borsa d'estudi "Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques", corresponent a l'any 1972, al senyor Ramon Lapiedra i Civera per a realitzar un estudi sobre *Les equacions de la mecànica relativista predictiva: Una família de solucions*. En la mateixa sessió el senyor Josep Teixidor i Batlle fou designat com a ponent del dit treball i el senyor Pere Pascual i de Sans com a ponent adjunt.

En la sessió plenària del 8 de juliol de 1975 l'INSTITUT prengué l'acord de publicar aquest estudi.

RESUM

El sistema d'equacions diferencials de la M. R. P. és reduït a un sistema més simple quasi-lineal acoblat de quatre equacions diferencials per a quatre funcions de quatre incògnites. En donem una família de solucions. Els operadors diferencials que apareixen en les noves equacions de la M. R. P. són caracteritzats geomètricament.

INTRODUCCIÓ

En la teoria newtoniana de la gravitació el problema dels n cossos és un problema ben plantejat i soluble en principi. Per a cada cos val la segona llei de Newton i cada cos és sotmès en cada instant a una força que depèn exclusivament de les distàncies relatives de la partícula en qüestió a les $n - 1$ restants a l'instant de temps en qüestió. Com que les equacions del moviment són així equacions diferencials de segon ordre, el coneixement de les posicions i velocitats de les n partícules a l'instant inicial determina completament les trajectòries de les partícules. Adoptant el llenguatge de L. Bel nosaltres caracteritzem aquest fet dient que la mecànica de Newton és una "mecànica predictiva".

Aleshores es planteja la qüestió de si resulta possible una mecànica predictiva per a la interacció clàssica de n partícules sense estructura en relativitat restringida. Suposem que un cert observador d'inèrcia, O , pogués descriure efectivament la dinàmica d'aquestes n partícules a través d'un sistema d'equacions diferencials de segon ordre en els vectors de posició de les partícules, és a dir:

$$(1) \quad \frac{d V_a^i}{d t} = \mu_a^i (X_b^i, V_c^k), \quad V_c^k = \frac{d X_c^k}{d t}$$

on X_a^i és el vector de posició de la partícula a , t és el temps de l'observador d'inèrcia en qüestió i les μ_a^i representen $3n$ funcions de les posicions i velocitats de les partícules: les "forces" del problema.

D'acord amb això que acabem de dir, en (1) els índexs $a, b, \dots$ van des d'1 fins a n , mentre que $i, j, \dots$ van des d'1 fins a 3. D'altra banda, cal entendre les posicions i velocitats de les partícules considerades simultàniament en el temps de l'observa-

dor O. Així l'observador O coneix en cada instant l'acceleració de les n partícules si coneix en aquell instant llurs posicions i velocitats. Tanmateix passa que si les coses les mira un altre observador d'inèrcia, O' , aquest veurà les posicions i velocitats, que O veia simultàniament, essencialment no simultànies, la qual cosa sembla condemnar d'entrada el nostre projecte de construir una mecànica relativista predictiva (M. R. P.). Aquesta dificultat ha semblat tan insuperable des del mateix naixement de la relativitat restringida, que durant més de seixanta anys ha marcat la incapacitat de construir una dinàmica relativista clàssica de n partícules. Encara avui no hi ha manual de relativitat on, en arribar al primer capítol de la dinàmica, no sigui hom confrontat amb la declaració que la relativitat de la simultaneïtat fa impossible la formulació predictiva del problema dels n cossos, i que llavors cal necessàriament introduir el camp amb el seus infinits graus de llibertat supletoris. Haver trencat aquesta superstició ha estat mèrit de Currie [1], el 1966, i de Hill [2], el 1967.

Si per a un cert observador d'inèrcia, O, la dinàmica del sistema de n partícules és donada per (1), i si nosaltres volem garantir que això continuï vàlid per a qualsevol altre observador d'inèrcia, hem de demanar simplement que el grup de Poincaré apliqui el conjunt de les solucions de (1) en ell mateix. Si això passa, nosaltres direm, seguint L. Bel [3], que el sistema diferencial (1) és invariant per Poincaré. És a dir, que serà possible en principi de construir una M. R. P. si existeixen funcions $\mu_a^i(X_b, V_c^k)$ tals que els sistemes (1) corresponents siguin invariants per Poincaré. Ha estat demostrat en [3] que efectivament existeixen sistemes dinàmics invariants per Poincaré; així, doncs, relativitat i predictivitat són definitivament consistents l'una amb l'altra.

Llavors, si (1) és un sistema invariant per Poincaré, això vol dir que cada observador d'inèrcia calcula les trajectòries de les partícules integrant sempre el mateix sistema (les funcions vectorials $\vec{\mu}_a$ són les mateixes per a qualsevol observador) només tenint compte de posar en cada cas les condicions inicials adequades [3]. És a dir, les "forces" de O' adopten la mateixa forma funcional respecte de les $\vec{X}_a$, $\vec{V}_b$ que les "forces" de O respecte de les $\vec{X}_a$, $\vec{V}_b$.

Deixant de banda la gravitació de Newton, la física clàssica té una altra teoria on hi ha formulat un problema de n cossos: l'electrodinàmica clàssica. L'electrodinàmica clàssica és essencialment la teoria d'una partícula de *prova* en un camp donat. Quan aquesta teoria s'estén formalment per a descriure la interacció electrodinàmica (clàssica) de n partícules carregades (cada partícula es mou governada pel camp produït per les altres $n - 1$ partícules), és ben sabut que l'acció de la partícula a sobre la partícula b en el temps t d'un cert observador d'inèrcia depèn de la posició i velocitat de la partícula a al temps retardat (potencials de Liénard-Wiechert). Quan en aquestes condicions hom formula la segona llei de Newton per a cada partícula, obté no pas un sistema d'equacions diferencials ordinàries de segon ordre, sinó un sistema d'equacions en diferències finites, i per a tals sistemes hom no pot esperar en principi que posicions i velocitats inicials de les partícules

determinin les trajectòries [4]; o, dit en el nostre llenguatge: en principi no hi ha predictivitat.

Diguem de passada que els potencials de Liénard-Wiechert no són l'única "sortida" de l'electrodinàmica clàssica, justament a causa de les diverses teories que hi ha darrera aquesta denominació genèrica. De qualsevol manera, però —per exemple en l'Electrodinàmica de Wheeler-Feynman [5] [6]—, hom és sempre conduït a un sistema d'equacions en diferències finites amb la manca de predictivitat resultant.

La M. R. P. podria ésser llavors el marc on el problema dels n cossos en electrodinàmica clàssica trobés una solució satisfactòria i la manera de construir una teoria coherent de la gravitació a l'espai de Minkowski, teoria que no sembla haver estat construïda fins avui [7]. El primer d'aquests dos problemes ja ha estat tractat per L. Bel i col.laboradors [8] [9].

Parlant de fer una electrodinàmica predictiva es planteja el problema de si la M. R. P. podrà incloure el fenomen de la radiació. No cal dir que el camp, en tant que entitat amb graus de llibertat propis independents de les posicions i velocitats de les partícules, no existeix en aquesta teoria. A més a més, donat un sistema dinàmic de n partícules invariant per Poincaré, hom sempre pot construir deu quantitats que es conserven: el moment lineal, l'energia, el moment angular i el moviment del centre de masses del sistema [3]. Així no hi ha camp *exterior* a les partícules i no hi ha transferència de moment lineal i angular cap a l'exterior. D'alguna manera podem dir, doncs, que el sistema no radia. Tanmateix això no vol dir necessàriament que tota mena de manifestació radiativa caigui fora de la teoria. En el marc de la M. R. P. la radiació d'un sistema cap a l'exterior és simplement la interacció del sistema amb altres partícules que no pertanyen al sistema i són en general incontrolables. De tota manera un dels destins de la teoria serà potser el d'ésser quantitzada, i potser el problema de la radiació en tota la seva amplària s'haurà de plantejar llavors. Justament fou el desig de quantificar la mecànica relativista dels sistemes de partícules allò que menà a fer un estudi del formalisme canònic en aquesta teoria: sense massa precisió, diguem que el resultat d'aquestes recerques pot ésser resumit dient que M. R. P. i formalisme canònic només són compatibles si les partícules són lliures (teorema de no interacció [10]). Resta oberta la qüestió de redefinir "formalisme canònic" d'una manera útil i, alhora, que no entri en contradicció amb la invariància per Poincaré.

Això que acabem de dir, sobre l'absència de radiació en la teoria, mostra que no hi ha contradicció entre predictivitat (l'acceleració de les partícules en un instant donat és determinada per les posicions i velocitats de totes les partícules en aquest instant, siguin les que siguin les distàncies relatives que les separin) i la velocitat de la llum, c , com a límit superior de propagació de les interaccions. De fet —en el marc de la teoria— res no es "propaga" entre les partícules. En tot cas, una velocitat límit per a la propagació de les interaccions tindria a veure amb el problema següent: provocada una pertorbació instantània sobre una de les partícules del

sistema per una causa externa al sistema, quant triguen les altres partícules a acusar la pertorbació?

Anem ara als resultats propis d'aquesta memòria:

Partim d'un sistema dinàmic de dues partícules, predictiu i invariant per Poincaré. Les equacions del moviment són les equacions (1). La invariància per Poincaré de (1) demana necessàriament i suficientment [1] [2] [3] que les "forces" μ_b satisfacin el sistema d'equacions diferencials:

$$\begin{aligned} (2) \quad & V_a^s (X_a^r - X_b^r) \frac{\partial \mu_b^i}{\partial X_a^s} + [V_a^s V_a^r + \mu_a^s (X_a^r - X_b^r) - \epsilon_a \delta^{rs}] \frac{\partial \mu_b^i}{\partial V_a^s} = \\ & = 2\mu_b^i V_b^r + V_b^i \mu_b^r \quad (\epsilon_a \equiv 1, \forall_a) \end{aligned}$$

El nostre resultat fonamental ha estat de demostrar que, quan la invariància per Poincaré s'entén com invariància pel grup propi i improp, el sistema quasi-lineal, acoblat, (2), de divuit equacions diferencials per a sis funcions de sis variables és equivalent a un sistema quasi-lineal, acoblat, de quatre equacions diferencials, per a quatre funcions de quatre variables.

Després donem una àmplia família de solucions de les equacions (2) de la M. R. P., estudiem aquesta família en el cas límit d'un sol cos i, finalment, caracteritzem geomètricament dos operadors diferencials, $\mathbb{f}_b$, que fan un paper essencial en aquesta memòria.

I

LES EQUACIONS DE LA M. R. P.: DUES PARTÍCULES

Sigui un sistema dinàmic de dues partícules predictiu i invariant per Poincaré.* Tindrem, doncs, un sistema tal com (1) on les funcions vectorials $\vec{\mu}_b(\vec{X}_a, \vec{V}_c)$ dependran de $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ exclusivament a través de

$$(1.1) \quad \vec{X} \equiv \vec{X}_2 - \vec{X}_1$$

(invariància del sistema per les translacions d'espai) i a més a més les equacions (2), lligades a la invariància per les transformacions de Lorentz, que en aquest cas poden ésser escrites

$$(1.2) \quad \begin{aligned} X^r V_b^i \frac{\partial \mu_b^i}{\partial X^s} + (V_a^s V_a^r - \epsilon_a \delta^{sr}) \frac{\partial \mu_b^i}{\partial V_a^s} + (-1)^{b'} X^r \mu_{(b')} \frac{\partial \mu_b^i}{\partial V_b^s} = \\ = 2 \mu_b^i V_b^r + V_b^i \mu_b^r \end{aligned}$$

Aquí i pertot arreu en aquesta memòria, dos índex iguals se sumen *únicament* si són l'un i l'altre en posicions covariant i contravariant respectivament. Tanmateix si qualsevol dels dos índexs apareix dins un parèntesi, llavors, tot i que siguin l'un i l'altre en posicions covariant i contravariant, no s'hi sumen.

Allà on apareguin dos índexs iguals, un d'ells, però, amb una prima, vol dir que en la fórmula en qüestió aquests dos índexs cal que prenguin valors diferents. Així, si $b = 1$, això vol dir que $b' = 2$.

Per a la resta de les notacions remetem el lector a la introducció d'aquesta memòria. Aclarim tanmateix que en (2), tot com en (1.2), c, la velocitat de la llum, ha estat presa igual a 1.

Les forces $\vec{\mu}_b$ d'un problema de dos cossos sempre poden ésser escrites

$$(1.3) \quad \vec{\mu}_b = B_b \vec{X} + A_b^a \vec{V}_a$$

on B_b, A_b^a són funcions exclusivament dels sis productes escalars de $\vec{X}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$,

* Invariant per Poincaré: és a dir, com expliquem a la introducció, un sistema dinàmic tal que el grup de Poincaré transforma el conjunt de les trajectòries dinàmiques possibles en ell mateix.

$$(1.4) \quad X_2^2, V_a^2, h_a \equiv \vec{X} \cdot \vec{V}_a, q \equiv \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$$

Tenint en compte (1.3), és

$$(1.5) \quad \frac{\partial \mu_b^i}{\partial X^s} = 2 \frac{\partial A_b^a}{\partial X^2} V_a^i X^s + \frac{\partial A_b^a}{\partial h_c} V_a^i V_c^s + B_b \delta^{is} +$$

$$+ 2 \frac{\partial B_b}{\partial X^2} X^i X^s + \frac{\partial B_b}{\partial h_c} X^i V_c^s$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial \mu_b^i}{\partial V_a^s} = A_b^a \delta^{is} + 2 \frac{\partial A_b^c}{\partial V_{(a)}^2} V_c^i V_a^s + \frac{\partial A_b^c}{\partial h_a} V_c^i X^s +$$

$$+ \frac{\partial A_b^c}{\partial q} V_c^i V_a^s + 2 \frac{\partial B_b}{\partial V_{(a)}^2} X^i V_a^s + \frac{\partial B_b}{\partial h_a} X^i X^s + \frac{\partial B_b}{\partial q} X^i V_a^s.$$

i substituint (1.3), (1.5), (1.6) en (1.2), resulta

$$(1.7) \quad R_b X^i X^r + S_b^a X^i V_a^r + T_b^a V_a^i X^r + U_b^{ca} V_c^i V_a^r = \epsilon_a A_b^a \delta^{ir}$$

amb les definicions següents:

$$(1.8) \quad R_b \equiv 2h_b \frac{\partial B_b}{\partial X^2} + (V_b^2 - 1) \frac{\partial B_b}{\partial h_b} + (q - 1) \frac{\partial B_b}{\partial h_b} +$$

$$+ (-1)^{(b')} A_b^{b'} \left\{ 2 (\vec{V}_a \cdot \vec{V}_{b'}) \frac{\partial B_b}{\partial V_{(b')}^2} + (\vec{V}_a \cdot \vec{V}_b) \frac{\partial B_b}{\partial q} + h_a \frac{\partial B_b}{\partial h_b} \right\} +$$

$$+ (-1)^{(b')} B_b \left\{ 2 h_b \frac{\partial B_b}{\partial V_{(b')}^2} + h_b \frac{\partial B_b}{\partial q} + X^2 \frac{\partial B_b}{\partial h_b} + A_b^{b'} \right\}$$

$$(1.9) \quad S_b^a \equiv 2 (V_a^2 - 1) \frac{\partial B_b}{\partial V_{(a)}^2} + \epsilon^a (q - 1) \frac{\partial B_b}{\partial q} + h_a \frac{\partial B_b}{\partial h_{(a)}} - 2 \delta_b^a B_b$$

$$\begin{aligned}
 (1.10) \quad T_b^a \equiv & 2 h_b \cdot \frac{\partial A_b^a}{\partial X^2} + (V_b^2 - 1) \frac{\partial A_b^a}{\partial h_b} + (q - 1) \frac{\partial A_b^a}{\partial h_{(b)}} + (-1)^{b'} A_{(b')}^a A_b^{b'} + \\
 & + \delta_b^a \cdot B_b - \delta_b^a B_b + (-1)^{b'} A_{(b')}^c \left\{ 2 \frac{\partial A_b^a}{\partial V_{(b')}^2} (V_c \cdot V_{b'}) + \right. \\
 & \left. + (V_c \cdot V_b) \frac{\partial A_b^a}{\partial q} + h_c \frac{\partial A_b^a}{\partial h_b} \right\} + \\
 & + (-1)^{b'} B_{(b')} \left\{ 2 h_b \cdot \frac{\partial A_b^a}{\partial V_{(b')}} + h_b \frac{\partial A_b^a}{\partial q} + X^2 \frac{\partial A_b^a}{\partial h_b} \right\}
 \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad U_b^{ca} \equiv 2 (V_a^2 - 1) \frac{\partial A_b^c}{\partial V_{(a)}^2} + \epsilon_a (q - 1) \frac{\partial A_b^c}{\partial q} + h_a \frac{\partial A_b^c}{\partial h_{(a)}} +$$

$$+ \delta_a^c A_b^{(a)} - \delta_b^c A_b^a - 2 \delta_b^a A_b^c$$

II

EL FORMALISME QUADRIDIMENSIONAL DE LA M.R.P.

Hi ha també una descripció quadridimensional de la M.R.P. [11]. L'equivalència entre aquest formalisme i el formalisme tridimensional ha estat demostrada per Bel [3].

En el formalisme quadridimensional, les equacions del moviment de les n partícules del sistema són

$$(2.1) \quad \frac{d u_a^\alpha}{d \tau} = \xi_a^\alpha (y_b^\beta, u_c^\gamma), \quad u_a^\alpha = \frac{d y_a^\alpha}{d \tau}$$

on y_a^α és el quadrivector de posició de la partícula a ($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$) i τ és el temps propi al llarg de les trajectòries dinàmiques. Les funcions ξ_a^α , les quadriforces del problema, són funcions quadrivectorials dels productes escalars de les quadriposicions i quadrivelocitats de les partícules que satisfan les condicions

$$(2.2) \quad u_a^\alpha \frac{\partial \xi_b^\beta}{\partial X_{(a)}^\alpha} + \xi_a^\alpha \frac{\partial \xi_b^\beta}{\partial u_{(a)}^\alpha} = 0 \quad (a \neq b)$$

$$(2.3) \quad u_a^\alpha \xi_{a\alpha} = 0$$

a més d'ésser invariants per les translacions de l'espai de Minkowski.

En el cas de dos cossos ξ_a^α sempre podrà ésser escrit així:

$$(2.4) \quad \xi_a^\alpha = \mathcal{O}_a^\alpha y^\alpha + \mathcal{A}_a^b u_b^\alpha + \mathcal{E}_a^\alpha \eta^\alpha \beta \gamma \delta y^\beta \mu_1^\gamma \mu_2^\delta$$

on $\mathcal{O}_a^\alpha, \mathcal{A}_a^b, \mathcal{E}_a^\alpha$ són determinades funcions dels quadriproductes escalars

$$(2.5) \quad y^\alpha y_\alpha, \quad y^\alpha u_{a\alpha}, \quad u_1^\alpha u_{2\alpha}$$

i $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ és el símbol de Levi-Civita en quatre dimensions.

III

LA M. R. P. I EL GRUP COMPLET DE POINCARÉ

Si demanem que la teoria sigui invariant pel grup de Poincaré ortocron *complet* (propri i impropri) —és a dir, el grup de Poincaré ortocron *complet* aplica la família de totes les solucions de (2.1) en ell mateix— és fàcil de demostrar [12] que aquest darrer extrem comporta

$$(3.1) \quad \mathcal{E}_a = 0$$

i amb això (2.4) esdevé

$$(3.2) \quad \xi_a^\alpha = \mathcal{O}_a^\alpha y^\alpha + \mathcal{A}_a^b u_b^\alpha$$

Ara, calculant ξ_a^α com la derivada segona respecte a τ de y_a^α , resulta

$$(3.3) \quad \xi_a^i = (1-V_a^2)^{-1} [\mu_a^i + (1-V_a^2)^{-1} (\vec{V}_a \cdot \vec{\mu}_a) V_a^i]$$

$$(3.4) \quad \xi_a^0 = (1-V_a^2)^{-2} (\vec{V}_a \cdot \vec{\mu}_a)$$

és a dir

$$(3.5) \quad \mu_a^i = (1-V_a^2) (\xi_a^i - \xi_a^0 V_a^i)$$

i tenint en compte (3.2), resulta

$$(3.6) \quad \mu_a^i = (1-V_a^2) \mathcal{O}_a^i X^i + (1-V_a^2)^{-1/2} \mathcal{A}_a^{a'} (V_a^{i'} - V_a^i)$$

és a dir, en la notació d' (1.3),

$$(3.7) \quad \epsilon_a A_b^a = 0 \quad (*)$$

* Devem a X. Fustero el coneixement que (3.7) és una conseqüència de (3.1), tal com acabem de mostrar.

D'altra banda, L. Mas [13] ha estudiat, en l'aproximació mòdul V^4/C^4 , una àmplia família de lagrangians generant forces invariants per Poincaré (mòdul V^4/C^4). Aquesta família de lagrangians comprèn en particular els lagrangians de Darwin i el d'Einstein-Infeld-Hoffmann. Doncs bé: per a tots els lagrangians de la família, les forces derivades a l'aproximació en qüestió satisfan (2.11).*

Encara més: Bel i col·laboradors [8] han construït fins a segon ordre en la constant d'acoblament l'única interacció (electrodinàmica) entre dues partícules compatible amb els potencials de Lienard-Wieckert. També en aquest cas resulta automàticament (3.7) a l'ordre d'aproximació en qüestió.

* Comunicació privada de L. Mas.

IV

LES EQUACIONS DE LA M. R. P. I EL GRUP COMPLET DE POINCARÉ

Per totes les raons esmentades en el paràgraf anterior, postularem (3.7). Llavors les equacions (1.7) de la M. R. P. de dues partícules resten reduïdes a

$$(4.1) \quad R_b = 0$$

$$(4.2) \quad S_b^a = 0$$

$$(4.3) \quad T_b^a = 0$$

$$(4.4) \quad U_b^{ca} = 0$$

Tenint encara en compte (3.7) i escrivint

$$(4.5) \quad A_b \equiv A_b^{(b)} = -A_b^{b'}$$

les equacions (4.1) – (4.4) resten reduïdes a

$$(4.6) \quad R_b = 2h_b \cdot \frac{\partial B_b}{\partial X^2} + (V_b^2 - 1) \frac{\partial B_b}{\partial h_b} + (q-1) \frac{\partial B_b}{\partial h_b} +$$

$$+ A_b \cdot \left\{ 2(V \cdot V_{b'}) \frac{\partial B_b}{\partial V_{(b')}^2} + (V \cdot V_b) \frac{\partial B_b}{\partial q} + h \frac{\partial B_b}{\partial h_b} \right\} +$$

$$+ (-1)^{(b')} B_b \cdot \left(2h_b \cdot \frac{\partial B_b}{\partial V_b^2} + h_b \frac{\partial B_b}{\partial q} + X^2 \frac{\partial B_b}{\partial h_b} - A_b \right) = 0$$

$$(4.7) \quad S_b^a = 2(V_a^2 - 1) \frac{\partial B_b}{\partial V_{(a)}^2} + \epsilon_a (q-1) \frac{\partial B_b}{\partial q} + h_a \frac{\partial B_b}{\partial h_{(a)}} - 2 \delta_b^a B_b = 0$$

$$\begin{aligned}
 T_b &= 2h_b \frac{\partial A_b}{\partial X^2} + (V_b^2 - 1) \frac{\partial A_b}{\partial h_b} + (q-1) \frac{\partial A_b}{\partial h_{(b)}} + (-1)^{b'} A_{(b')} A_b - B_b + \\
 (4.8) \quad &+ A_b \left\{ 2(V \cdot V_b) \frac{\partial A_b}{\partial V_{(b')}^2} + (V \cdot V_b) \frac{\partial A_b}{\partial q} + h \frac{\partial A_b}{\partial h_b} \right\} + \\
 &+ (-1)^{b'} B_{(b')} \left(2h_b \frac{\partial A_b}{\partial V_{(b')}^2} + h_b \frac{\partial A_b}{\partial q} + X^2 \frac{\partial A_b}{\partial h_b} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad U_b^a &= 2(V_a^2 - 1) \frac{\partial A_b}{\partial V_{(a)}^2} + \epsilon^a (q-1) \frac{\partial A_b}{\partial q} + h_a \frac{\partial A_b}{\partial h_{(a)}} + \\
 &+ \delta_a^{(b)} A_b^{(a)} - A_b^a - 2\delta_b^a A_b = 0
 \end{aligned}$$

V

LA INTEGRACIÓ PARCIAL DEL SISTEMA (4.6)–(4.9)

De les equacions (4.6)–(4.9) hi ha les (4.7), (4.9) que poden ésser integrades fàcilment perquè les funcions i les variables se separen. La integració dóna:

$$(5.1) \quad B_b = h_b^{-2} (1-q)^2 \psi_b$$

$$(5.2) \quad A_b = A_b^{(b)} = -A_b^{b'} = h_b^{-3} (1-q)^2 \varphi_b$$

on ψ_b i φ_b són quatre funcions de les variables X^2 , M , N_1 , N_2

$$(5.3) \quad M \equiv (1-V_1^2)^{1/2} (1-V_2^2)^{1/2} (1-q)^{-1}$$

$$(5.4) \quad N_a \equiv (1-V_a^2)^{-1/2} h_a$$

Definirem també:

$$(5.5) \quad P \equiv M N_1 N_2$$

Llavors prenent com a variables independents h_1 , h_2 , X^2 , M , P , N_1 si es tracta de ψ_1 , φ_1 , i h_1 , h_2 , X^2 , M , P , N_2 si es tracta de ψ_2 , φ_2 , en comptes de les h_1 , h_2 , X^2 , q , v_1^2 , v_2^2 i portant (5.4), (5.3) a (4.6), (4.8), obtindrem després de càlculs pesats però elementals:

$$(5.6) \quad \mathcal{L}_b \psi_b = \gamma_b$$

$$(5.7) \quad \mathcal{L}_b \varphi_b = \delta_b$$

on $\mathcal{L}_b$ és l'operador diferencial:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_b \equiv & 2P \frac{\partial}{\partial X^2} - N_{(b)} \frac{\partial}{\partial N_b} + (-1)^{(b')} [M^{-1} (M^2 - 1) N_b^{-2} \varphi_b + (M - M^{-1} P N_b^{-2}) \psi_b] \frac{\partial}{\partial M} + \\
 (5.8) \quad & + [(-1)^{(b')} \left\{ (N_b^{-2} P - 1) \varphi_b + (X^2 + P) \psi_b \right\} - M^2 N_b^{-2} - P] \frac{\partial}{\partial P}
 \end{aligned}$$

i on

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad \gamma_b \equiv & 2[(-1)^{(b')} \left\{ (N_b^{-2} - P^{-1}) \varphi_b + (1 + X^2 P^{-1}) \psi_b \right\} - N_b^{-2} M^2 P^{-1}] \psi_b + \\
 & + (-1)^{(b')} P^{-1} \psi_b \varphi_b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5.10) \quad \delta_b \equiv & [(-1)^{(b')} \left\{ (2N_b^{-2} - 3P^{-1}) \varphi_b + (2 + 3X^2 P^{-1}) \psi_b \right\} - 3N_b^{-2} M^2 P^{-1}] \varphi_b + \\
 & + P \psi_b
 \end{aligned}$$

Hem reduït així, per a dues partícules, el sistema acoblat quasi-lineal (1.2) de divuit equacions diferencials per a sis funcions de sis variables a un sistema acoblat quasi-lineal, (5.6), (5.7), de quatre equacions diferencials per a quatre equacions de quatre incògnites. De passada hem après quelcom d'explícit sobre l'estructura de les forces possibles de la M. R. P.: que les funcions B_b , A_b^a d'(1.3) han de tenir la forma donada per (5.1), (5.2).

VI

LA INTEGRACIÓ DEL SISTEMA (5.6), (5.7)

Mirem què diu la teoria d'equacions diferencials sobre la integració d'un sistema tal com (5.6), (5.7):

Suposem que completem convenientment el sistema (5.6), (5.7) amb les equacions suplementàries

$$(6.1) \quad \mathbb{L}_b \psi_{b'} = \gamma_{bb'},$$

$$(6.2) \quad \mathbb{L}_b \varphi_{b'} = \delta_{bb'},$$

on $\gamma_{bb'}$, $\delta_{bb'}$, són expressions en X^2 , M , N_a , ψ_a , φ_a , triades de manera que el sistema (5.6), (5.7), (6.1), (6.2) sigui integrable. Siguin quatre funcions ψ_a , φ_a , solució d'aquest sistema i tals que vinguin donades implícitament per

$$(6.3) \quad \phi_A(X^2, M, N_1, N_2, \psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2) = C_A$$

on C_A són quatre constants (l'índex A va des d'1 fins a 4) i ϕ_A quatre funcions de jacobià respecte a les ψ_a , φ_a no nul. Llavors és fàcil de veure que cadascuna de les funcions ϕ_A satisfà automàticament les dues equacions diferencials ($b = 1, 2$):

$$(6.4) \quad \mathbb{L}_b \phi_A + \gamma_b \frac{\partial \phi_A}{\partial \psi_{(b)}} + \delta_b \frac{\partial \phi_A}{\partial \varphi_{(b)}} + \gamma_{bb'} \frac{\partial \phi_A}{\partial \psi_{(b')}} + \delta_{bb'} \frac{\partial \phi_A}{\partial \varphi_{(b')}} = 0$$

Recíprocament, siguin quatre funcions $\phi_A(X^2, M, N_1, N_2, \psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2)$ solució de (6.4) i de jacobià no nul respecte a les variables ψ_a , φ_a . Aleshores demostrem que les quatre funcions ψ_a , φ_a definides per (6.3) són solució del sistema (5.6), (5.7), (6.1), (6.2). La demostració va d'aquesta manera:

De (6.3) podem veure que resulta

$$(6.5) \quad \mathbb{L}_b \phi_A + \mathbb{L}_b \psi_b \frac{\partial \phi_A}{\partial \psi_{(b)}} + \mathbb{L}_b \varphi_b \frac{\partial \phi_A}{\partial \varphi_{(b)}} + \mathbb{L}_b \psi_{b'} \frac{\partial \phi_A}{\partial \psi_{(b')}} + \mathbb{L}_b \varphi_{b'} \frac{\partial \phi_A}{\partial \varphi_{(b')}} = 0$$

i restant (6.4) i (6.5)

$$(6.6) \quad (\mathbb{E}_b \psi_b - \gamma_b) \frac{\partial \phi_A}{\partial \psi_{(b)}} + (\mathbb{E}_b \psi_b - \delta_b) \frac{\partial \phi_A}{\partial \varphi_{(b)}} + (\mathbb{E}_b \psi_b - \gamma_{bb'}) \frac{\partial \phi_A}{\partial \psi_{(b')}} + \\ + (\mathbb{E}_b \varphi_b - \delta_{bb'}) \frac{\partial \phi_A}{\partial \varphi_{(b')}} = 0$$

i com que hem dit que el jacobià respecte a ψ_a, φ_a de les quatre funcions ϕ_A és no nul resulta que (6.6) implica (5.6), (5.7), (6.1), (6.2), com volíem demostrar.

Hom dedueix, doncs, que la integració del sistema (5.6), (5.7), (6.1), (6.2) resta reduïda a trobar quatre funcions independents, cadascuna solució de les dues equacions (6.4). Llavors (6.3) determina implícitament la solució general de (5.6), (5.7), (6.1), (6.2), és a dir, determina una família de solucions de (5.6), (5.7), justament aquella família que hem seleccionat en completar el sistema (5.6), (5.7) amb les equacions (6.1), (6.2) que per hipòtesi hem estimat compatibles amb aquelles.

El mètode que acabem d'exposar és, a aquest nivell, força formal encara perquè descansa sobre la hipòtesi de la compatibilitat de (6.1), (6.2) amb (5.6), (5.7) (o allò que és el mateix: que les dues equacions (6.4) per a ϕ_A són compatibles) sense que hagi estat donat cap criteri per a determinar si, un cop triades $\gamma_{bb'}$ i $\delta_{bb'}$ en (6.1), (6.2), aquestes equacions formen amb (5.6), (5.7) un sistema compatible.

Com que de tota manera el problema de la integració exacta de (5.6), (5.7) sembla massa complicat, ens limitarem a cercar solucions exactes en un cas particular per al qual el mètode formal exposat és suficient per a donar la solució, de manera que deixarem aquí sense altre tractament aquest problema de compatibilitat del cas general.

VII

UNA FAMÍLIA PARTICULAR DE SOLUCIONS DE LES EQUACIONS (5.6), (5.7)

Cerquem solucions de (5.6), (5.7) tals que $\psi_b = 0$. Això, d'acord amb (5.1), (1.3), (3.7), vol dir forces $\vec{\mu}_b$ del tipus

$$(7.1) \quad \vec{\mu}_b = A_b (\vec{V}_b - \vec{V}_{b'})$$

Amb $\psi_b = 0$, l'equació (5.6) és automàticament satisfeta. Ens resta així el sistema

$$(7.2) \quad f_b \varphi_b = \delta_b$$

D'acord amb el que hem dit al paràgraf anterior, hem de formar les equacions diferencials

$$(7.3) \quad f_b \phi_a + \delta_b \frac{\partial \phi_a}{\partial \varphi_{(b)}} + f_b \varphi_b \frac{\partial \phi_a}{\partial \varphi_{(b')}} = 0$$

amb

$$(7.4) \quad \phi_a = \phi_a (X^2, M, N_1, N_2, \varphi_1, \varphi_2)$$

i on el valor de $f_b \varphi_b$ ha d'ésser adequadament postulat. En particular el problema de compatibilitat que això planteja pot ésser ignorat si ens limitem a cercar solucions de (7.3) tals que

$$(7.5) \quad \frac{\partial \phi_a}{\partial \varphi_a} = 0$$

Aleshores les equacions (7.3) s'escriuen més explícitament

$$(7.6) \quad \varepsilon_1 \phi_1 + \delta_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$(7.7) \quad \varepsilon_2 \phi_1 + \varepsilon_2 \varphi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi_1} = 0$$

$$(7.8) \quad \varepsilon_1 \phi_2 + \varepsilon_1 \varphi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi_2} = 0$$

$$(7.9) \quad \varepsilon_2 \phi_2 + \delta_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi_2} = 0$$

Veurem que efectivament (7.3) i (7.5) són compatibles.

La solució general, ϕ_1 , de (7.6) determina implícitament una família de solucions, φ_1 , de (7.2) a través (tenint en compte (7.5)) de

$$(7.10) \quad \phi_1(X^2, M, N_1, N_2, \varphi_1) = C_1$$

Llavors (7.7) és automàticament satisfeta. Anàlogament ho són (7.9), (7.8).

Anem a veure-ho concretament:

De (5.8), (5.10), tenint en compte $\psi_b = 0$ i les equacions (7.6), (7.9), escriurem explícitament

$$(7.11) \quad 2P \frac{\partial \phi_b}{\partial X^2} - N_b \frac{\partial \phi_b}{\partial N_{(b)}} + (-1)^{(b')} M^{-1} (M^2 - 1) N_b^{-2} \varphi_b \frac{\partial \phi_b}{\partial M} +$$

$$+ [(-1)^{(b')} (N_b^{-2} P - 1) \varphi_b, -M^2 N_b^2 - P] \frac{\partial \phi_b}{\partial M} +$$

$$+ [(-1)^{(b')} (2N_b^{-2} - 3P^{-1}) \varphi_b, -3N_b^2 M^2 P^{-1}] \varphi_b \frac{\partial \phi}{\partial \phi_{(b)}} = 0$$

El sistema característic d'aquesta equació diferencial és

$$(7.12) \quad \frac{dx^2}{2P} = - \frac{dN_{(b)}}{N_b} = \frac{dM}{(-1)^{(b')} M^{-1} (M^2 - 1) N_b^{-2} \varphi_b}$$

$$= \frac{dP}{(-1)^{(b')} (N_b^{-2} P - 1) \varphi_b, -M^2 N_b^2 - P} = \frac{d\varphi_{(b)}}{[(-1)^{(b')} (2N_b^{-2} - 3P^{-1}) \varphi_b, -3N_b^2 M^2 P^{-1}] \varphi_b}$$

on $X^2, M, P, N_b, \varphi_1, \varphi_2$ han d'ésser tractades com a variables independents.

Quatre integrals primeres de (7.12) són

$$(7.13) \quad H_b \equiv (1-M^2) e^{-(-1)^{(b')}} N_b^{-2} \varphi_b,$$

$$(7.14) \quad I_b \equiv N_b^3 P^{-3} (1-M^2)^{1/2} \varphi_b$$

$$(7.15) \quad J_b \equiv (PN_b^{-1} - N_b) e^{-(-1)^{(b')}} \cdot \frac{1}{2} N_b^{-2} \varphi_b + H_b E_b$$

$$(7.16) \quad K_b \equiv X^2 + N_b^2 + E_b (2J_b - H_b E_b)$$

on hem posat

$$(7.17) \quad E_b \equiv \int e^{\frac{(-1)^{(b')}}{2}} \varphi_b N_b^{-2} dN_b$$

En aquesta integral N_b i φ_b han d'ésser tractades com a variables independents.

L'obtenció d'aquestes quatre integrals primeres ha estat facilitada perquè en (7.12) les variables se separen parcialment, de manera que hom pot integrar separatament l'equació:

$$(7.18) \quad \frac{dN(b)}{-N_b} = \frac{dM}{(-1)^{(b')} M^{-1} (M^2 - 1) N_b^{-2} \varphi_b},$$

que dóna justament la integral primera H_b .

La mera inspecció de (7.13)-(7.16) diu que aquestes integrals primeres són funcionalment independents, de manera que la solució general de (7.11) és una funció arbitrària, ϕ_b , de les quatre integrals primeres en qüestió:

$$(7.19) \quad \phi_b = \phi_b(I_b, H_b, J_b, K_b)$$

Aquí veiem de seguida que (7.3) i (7.5) són compatibles, car fent que no depengui sinó de I_b , tenim automàticament (7.5). Tanmateix aquesta no és pas l'única manera de tenir (7.5). En efecte, tenint en compte (7.19), l'equació (7.5) s'escriu

$$(7.20) \quad \frac{\partial \phi_b}{\partial H_{(b)}} \cdot \frac{\partial H_b}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \phi_b}{\partial J_{(b)}} \cdot \frac{\partial J_b}{\partial \varphi_b} + \frac{\partial \phi_b}{\partial K_b} \cdot \frac{\partial K_b}{\partial \varphi_b} = 0$$

D'altra banda és:

$$(7.21) \quad \frac{\partial H_b}{\partial \varphi_b} = (-1)^{(b)} N_b^{-2} H_b$$

$$(7.22) \quad \frac{\partial J_b}{\partial \varphi_b} = H_b \left(\frac{\partial E_b}{\partial \varphi_b} + \frac{(-1)^{(b)}}{2} N_b^{-2} E_b \right) + \frac{(-1)^{(b)}}{2} N_b^{-2} J_b$$

$$(7.23) \quad \frac{\partial K_b}{\partial \varphi_b} = J_b \left(2 \frac{\partial E_b}{\partial \varphi_b} + (-1)^{(b)} N_b^{-2} E_b \right)$$

i llavors (7.20) esdevé

$$(7.24) \quad H_b \frac{\partial \phi_b}{\partial H_{(b)}} + \frac{1}{2} J_b \frac{\partial \phi_b}{\partial J_{(b)}} + \left(\frac{1}{2} H_b \frac{\partial \phi_b}{\partial J_{(b)}} + \frac{\partial \phi_b}{\partial K_{(b)}} \right) \left(E_b + 2(-1)^b N_b^2 \frac{\partial E_b}{\partial \varphi_b} \right) = 0$$

En aquesta equació apareixen les variables independents X^2 , M , N_b , N_b^{-1} , φ_b i φ_b^{-1} . Fem un canvi de variables de manera que tinguem com a noves variables independents les H_b , I_b , J_b , K_b , N_b , φ_b . Llavors en (7.24) les N_b , φ_b , apareixen únicament en el factor $E_b + 2(-1)^b N_b^2 \frac{\partial E_b}{\partial \varphi_b}$. En conseqüència (7.24) és equivalent a

$$(7.25) \quad H_b \frac{\partial \phi_b}{\partial H_{(b)}} + \frac{1}{2} J_b \frac{\partial \phi_b}{\partial J_{(b)}} = 0$$

$$(7.26) \quad \frac{1}{2} H_b \frac{\partial \phi_b}{\partial J_{(b)}} + \frac{\partial \phi_b}{\partial K_{(b)}} = 0$$

La integral general d'aquest sistema és

$$(7.27) \quad \phi_b = \phi_b(I_b, K_b - H_b^{-1} J_b^2)$$

Un càlcul elemental dona

$$(7.28) \quad K_b - H_b^{-1} J_b^2 = X^2 + N_b^2 + (M^2 - 1)^{-1} (MN_b - N_b)^2$$

i hom veu que efectivament $K_b - H_b^{-1} J_b^2$ no depèn de φ_b . Podem escriure (7.27) més explícitament:

$$(7.29) \quad \phi_b = \phi_b [N_b^3 P^{-3} (1-M^2)^{1/2} \varphi_b, X^2 + N_b^2 + (M^2-1)^{-1} (MN_b - N_b)^2]$$

i posant

$$(7.30) \quad \phi_b = C_b$$

amb C_b dues constants arbitràries, ens resta finalment com a família de solucions obtinguda per a (7.2) amb $\psi_b = 0$:

$$(7.31) \quad \varphi_b = M^3 (1-M^2)^{-1/2} N_b^3, F_b [X^2 + N_b^2 + (M^2-1)^{-1} (MN_b - N_b)^2]$$

amb F_b dues funcions arbitràries de l'argument que hi apareix.

VIII

LES "SOLUCIONS A UN COS"

Suposem que la massa de la partícula 2 és suficientment gran, relativament a l'acció que sobre ella exerceix la partícula 1, perquè puguem considerar nul·la la seva acceleració.

$$(8.1) \quad \vec{\mu}_2 = 0$$

Llavors les equacions (5.6), (5.7) es redueixen a

$$(8.2) \quad \mathcal{L}_1 \varphi_1 = \delta_1$$

$$(8.3) \quad \mathcal{L}_1 \psi_1 = \gamma_1$$

amb

$$(8.4) \quad \mathcal{L}_1 = 2P \frac{\partial}{\partial X^2} - N_1 \frac{\partial}{\partial N_1} - (P + M^2 N_1^2) \frac{\partial}{\partial P}$$

$$(8.5) \quad \gamma_1 = -2 M^2 P^{-1} N_1^2 \psi_1$$

$$(8.6) \quad \delta_1 = -3 M^2 P^{-1} N_1^2 \varphi_1 + P \psi_1$$

D'acord amb allò que hem exposat en el paràgraf 6, la integració del sistema (8.2), (8.3) demana la integració de l'equació diferencial lineal.

$$(8.7) \quad \mathcal{L}_1 \phi + \gamma_1 \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} + \delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial \varphi_1} = 0$$

on ϕ és una funció

$$(8.8) \quad \phi = \phi(X^2, M, P, N, \varphi_1, \psi_1)$$

i les variables $X^2, M, P, N, \varphi_1, \psi_1$ són considerades com a variables independents.

Tenint en compte (8.4), (8.5), (8.6), el sistema característic diferencial de (8.7) és:

$$(8.9) \quad \frac{dx^2}{-2P} = \frac{dN_1}{N_1} = \frac{dP}{N_1^2 M^2 + P} = \frac{d\psi_1}{2N_1^2 M^2 P^{-1} \psi_1} = \frac{d\varphi_1}{3N_1^2 M^2 P^{-1} \varphi_1 - P\psi_1}$$

Cinc integrals primeres independents d'aquest sistema són:

$$(8.10) \quad M^2, \quad X^2 + P^2 M^{-2} N_1^{-1} \equiv A, \quad MN_1 - PM^{-1} N_1^{-1} \equiv B$$

$$(8.11) \quad N_1^2 P^{-2} \psi_1 \equiv C, \quad M^2 P^{-3} N_1^3 \varphi_1 + P^{-1} N_1 \psi_1 \equiv D$$

i d'aquí resulta que la integral general de (8.2), (8.3) és

$$(8.12) \quad \psi_1 = N_1^2 f$$

$$(8.13) \quad \varphi_1 = N_1^4 f + N_1^3 g$$

on f i g són dues funcions arbitràries de M^2 , A , B . En conseqüència, tenint en compte (5.1), (5.2):

$$(8.14) \quad B_1 = (1 - V_2^2)^{-1} (1 - q)^2 f$$

$$(8.15) \quad A_1 = (1 - V_2^2)^{-3/2} (1 - q)^2 [h_2 (1 - V_2^2)^{-1/2} f + g]$$

que resulta que és la solució general al problema d'un cos. Aquest resultat coincideix amb el trobat per Bel [14] per un camí tot diferent.

Posem ara $\psi_b = 0$, i tractem de trobar les solucions a un cos corresponents, directament a partir del resultat del paràgraf 7. En (7.13)–(7.16) posarem $\varphi_b = \varphi_2 = 0$, $b = 1$. Serà:

$$(8.16) \quad H_1 (\varphi_2 = 0) = 1 - M^2$$

$$(8.17) \quad I_1 (\varphi_2 = 0) = N_1^3 P^{-3} (1 - M^2)^{1/2} \varphi_1$$

$$(8.18) \quad J_1 (\varphi_2 = 0) = PN_1^{-1} - N_1 M^2$$

$$(8.19) \quad K_1 (\varphi_2 = 0) = X^2 + 2P - N_1^2 M^2$$

Per tant ha d'ésser:

$$(8.20) \quad \varphi_1 = N_2^3 M^3 (1-M^2)^{-1/2} \tilde{g} (1-M^2, P N_1^{-1} - N_1 M^2, X^2 + 2 P - N_1^2 M^2)$$

on $\tilde{g}$ es una funció arbitrària dels arguments que s'hi indiquen.

D'altra banda, posant $\psi_1 = 0$, (8.12), (8.13) donen:

$$(8.21) \quad \varphi_1 = N_2^3 \tilde{g} (M^2, M N_1 - P M^{-1} N_1^{-1}, X^2 + P^2 M^{-2} N_1^{-1})$$

i com calia esperar (8.21) i (8.20) representen la mateixa solució general. En efecte: entre les integrals primeres $H_1(\varphi_2 = 0)$, $J_1(\varphi_2 = 0)$, $K_1(\varphi_2 = 0)$, d'una banda, i les M^2 , A , B , hi ha les relacions

$$(8.22) \quad \begin{aligned} M^2 &= 1 + H_1(\varphi_2 = 0), & A &= K_1(\varphi_2 = 0) + M^{-2} J_1^2(\varphi_2 = 0), \\ B &= -M^{-1} J_1(\varphi_2 = 0) \end{aligned}$$

IX

INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DELS OPERADORS $\mathcal{E}_b$

Suposem una funció Q , funció de les posicions i velocitats de les dues partícules del nostre problema (dotze variables en total),

$$(9.1) \quad Q = Q(x_a^i, V_b^i)$$

Cerquem funcions d'aquest tipus que siguin invariants pel grup de Poincaré. Com que Q depèn de dotze variables i el grup de Poincaré té deu paràmetres, podem estar segurs que hi ha funcions invariants: és més, hi ha dues ($12 - 10 = 2$) funcions invariants independents i únicament dues.

Comencem amb el subgrup de les translacions d'espai. La invariància de Q enfront d'aquest subgrup es tradueix en el fet que necessàriament i suficientment Q depèn de $\vec{X}_a$ exclusivament a través de $\vec{X} \equiv \vec{X}_2 - \vec{X}_1$ mentre que la invariància pel subgrup de les rotacions d'espai implica necessàriament i suficientment que la dependència que exhibeix (9.10) sigui exclusivament a través dels productes escalars dels tres vectors $\vec{X}$, $\vec{V}_b$.

$$(9.2) \quad Q = Q(X^2, V_b^2, h_b, q)$$

i ens resta analitzar la invariància per les transformacions de Lorentz pures i la invariància temporal al llarg de les trajectòries dinàmiques.

Sobre l'espai de dotze dimensions de les posicions i velocitats de les dues partícules, el grup de Poincaré actua segons una realització, en la qual els generadors, K_j , de les transformacions de Lorentz pures tenen l'expressió [3]:

$$(9.3) \quad K_j^A: (-V_a^i X_{aj}, \epsilon_a^i \delta_j^i - V_a^i V_{aj} - \mu_a^i X_{aj})$$

En aquesta expressió l'índex j va des d'u fins a tres, com és habitual, i serveix per a enumerar els tres diferents generadors corresponents als tres paràmetres de les transformacions de Lorentz pures: en aquest cas les tres components de la velocitat relativa dels dos sistemes d'inèrcia entre els quals es realitza la transformació. L'índex A és l'índex que enumera les components dels diferents vectors $\vec{K}_j$ sobre l'espai de dotze dimensions en què estan definits: $A = 1, 2, \dots, 12$, 1 (9.12) ha estat

escrita amb la idea que les posicions de les partícules 1 i 2 donen successivament les sis primeres dimensions d'aquest espai, mentre que les velocitats donen les sis darreres.

Llavors la invariància de Q per les transformacions de Lorentz pures s'expressa a través de l'equació diferencial

$$(9.4) \quad -V_a^i X_a^i \frac{\partial Q}{\partial X_a^i} + (\epsilon_a \delta_j^i - V_a^i V_{aj} - \mu_a^i X_{aj}) \frac{\partial Q}{\partial V_a^i} = 0$$

que tenint en compte (9.2) s'escriu més explícitament

$$(9.5) \quad \begin{aligned} & -(-1)^a X_a^i \left(2h_a \frac{\partial Q}{\partial X^2} + (\vec{V}_a \cdot \vec{V}_b) \frac{\partial Q}{\partial h_b} \right) + \\ & + \epsilon_a \left(\frac{\partial Q}{\partial h_a} X^j + 2 \frac{\partial Q}{\partial V_a^2} V_a^j + \epsilon^a \frac{\partial Q}{\partial q} V_a^j \right) - \\ & - \left(h_a \frac{\partial Q}{\partial h_a} + 2V_a^2 \frac{\partial Q}{\partial V_a^2} + 2\epsilon^a q \frac{\partial Q}{\partial q} \right) V_a^j - \\ & - \left\{ (\vec{X} \cdot \vec{\mu}_a) \frac{\partial Q}{\partial h_a} + 2(\vec{V}_a \cdot \vec{\mu}_a) \frac{\partial Q}{\partial V_a^2} + \epsilon^a (\vec{V}_a \cdot \vec{\mu}_a) \frac{\partial Q}{\partial q} \right\} X_a^i = 0 \end{aligned}$$

Substituïm a tot arreu en aquesta equació $\vec{X}_2$ per $\vec{X}_1 + \vec{X}$ i després tinguem en compte que Q depèn de $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ exclusivament a través de $\vec{X}$. Finalment considerem que $\vec{X}$, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ són linealment independents. Llavors (9.5) esdevé:*

$$(9.6) \quad \begin{aligned} & - \left[2h \frac{\partial Q}{\partial X^2} + \left\{ (\vec{V} \cdot \vec{V}_b) + (\vec{X} \cdot \vec{\mu}_b) \right\} \frac{\partial Q}{\partial h_b} + 2(\vec{V}_b \cdot \vec{\mu}_b) \frac{\partial Q}{\partial V_b^2} + \right. \\ & + \epsilon^b (\vec{V}_b \cdot \vec{\mu}_b) \frac{\partial Q}{\partial q} \left. \right] X_1^j - \left[2h_2 \frac{\partial Q}{\partial X^2} + \left\{ (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_b) - \epsilon_b \right\} \frac{\partial Q}{\partial h_b} + (\vec{X} \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial Q}{\partial h_2} + \right. \end{aligned}$$

* A (9.6) hem posat: $h \equiv h_2 - h_1$, $\vec{V} \equiv \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

$$\begin{aligned}
& + 2(\vec{V}_2 \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial Q}{\partial V_2^2} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial Q}{\partial q}] X^j + \\
& + [2(1-V_a^2) \frac{\partial Q}{\partial V_a^2} - h_a \frac{\partial Q}{\partial h_a} + \epsilon^a (1-q) \frac{\partial Q}{\partial q}] V_a^j = 0
\end{aligned}$$

i, com que Q depèn de $\vec{X}_1, \vec{X}_2$ exclusivament a través de $\vec{X}$ i que X^j, V_a^j són tres vectors linealment independents, resulta

$$(9.7) \quad 2h \frac{\partial Q}{\partial X^2} + \left\{ (\vec{V} \cdot \vec{V}_b) + (\vec{X} \cdot \vec{\mu}_b) \right\} \frac{\partial Q}{\partial h_b} + 2(\vec{V}_b \cdot \vec{\mu}_b) \frac{\partial Q}{\partial V_b^2} + \epsilon^b (\vec{V}_b \cdot \vec{\mu}_b) \frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

$$\begin{aligned}
(9.8) \quad & 2h_2 \frac{\partial Q}{\partial X^2} + \left\{ (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_b) - \epsilon_b \right\} \frac{\partial Q}{\partial h_b} + (\vec{X} \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial Q}{\partial h_2} + 2(\vec{V}_2 \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial Q}{\partial V_2^2} + \\
& + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial Q}{\partial q} = 0
\end{aligned}$$

$$(9.9) \quad 2(1-V_{(a)}^2) \frac{\partial Q}{\partial V_a^2} - h_{(a)} \frac{\partial Q}{\partial h_a} + \epsilon^a (1-q) \frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

Un càlcul elemental mostra que el primer membre de (9.7) és simplement

$$(9.10) \quad V_a^i \frac{\partial Q}{\partial X_a^i} + \mu_a^i \frac{\partial Q}{\partial V_a^i}$$

de manera que (9.7) expressa que Q es conserva en el temps:

$$(9.11) \quad \frac{dQ}{dt} = 0$$

Pel que fa a les dues equacions (9.9), llur integració ens diu que Q depèn de V_a^2, h_a, q exclusivament a través de M, N_1, N_2 o, encara millor per a l'estudi de (9.8), exclusivament a través de M, N_1, P [vegeu (5.3), (5.4), (5.5)]:

$$(9.12) \quad Q = Q(X^2, M, N_1, P)$$

i d'aquí:

$$(9.13) \quad \frac{\partial Q}{\partial V_2^2} = -\frac{1}{2} (1-V_2^2)^{-1} M \frac{\partial Q}{\partial M}$$

$$(9.14) \quad \frac{\partial Q}{\partial h_1} = (1-V_1^2)^{-1/2} \left(\frac{\partial Q}{\partial N_1} + N_1^{-1} P \frac{\partial Q}{\partial P} \right)$$

$$(9.15) \quad \frac{\partial Q}{\partial h_2} = (1-V_2^2)^{-1/2} N_1 M \frac{\partial Q}{\partial P}$$

$$(9.16) \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = (1-V_1^2)^{-1/2} (1-V_2^2)^{-1/2} \left(M^2 \frac{\partial Q}{\partial M} + PM \frac{\partial Q}{\partial P} \right)$$

Duguem aquestes expressions a (9.8) i tinguem en compte (9.4), (5.1), (5.2). Resulta per a l'operador diferencial que actua sobre Q en (9.8):

$$(9.17) \quad 2h_2 \frac{\partial}{\partial X^2} + \left\{ (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_b) - \epsilon_b \right\} \frac{\partial}{\partial h_b} + (\vec{X} \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial}{\partial h_2} + 2(\vec{V}_2 \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial}{\partial V_2^2} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{\mu}_2) \frac{\partial}{\partial q} = (1-V_2^2)^{-1/2} M^{-1} N_1^{-1} \mathcal{L}_1$$

amb $\mathcal{L}_1$ donat per (5.8). És a dir, (9.8) esdevé:

$$(9.18) \quad \mathcal{L}_1 Q = 0$$

Si en comptes de posar $\vec{X}_2 = \vec{X} + \vec{X}_1$ en (9.5), posem $\vec{X}_1 = \vec{X}_2 - \vec{X}$, d'una banda hom torna a trobar (9.7), (9.9) i en lloc de (9.8) hom obté:

$$(9.19) \quad -2h_1 \frac{\partial Q}{\partial X^2} + (\epsilon_a - \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_a) \frac{\partial Q}{\partial h_a} + (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{X}) \frac{\partial Q}{\partial h_1} + 2(\vec{V}_1 \cdot \vec{\mu}_1) \frac{\partial Q}{\partial V_1^2} + (\vec{V}_2 \cdot \vec{\mu}_1) \frac{\partial Q}{\partial q} = 0$$

és a dir

$$(9.20) \quad \mathcal{L}_2 Q = 0$$

i hom veu que (9.7), (9.8), (9.19) no són independents. En efecte, (9.7) és la diferència de (9.19) i (9.8). En notacions més compactes tenim, doncs,

$$(9.21) \quad M^{-1} \left\{ (1-V_1^2)^{1/2} N_2^{-1} \mathcal{L}_2 - (1-V_2^2)^{1/2} N_1^{-1} \mathcal{L}_1 \right\} Q = \frac{d}{dt} Q$$

Que (9.7), (9.8), (9.19) no siguin independents era esperable des del moment que el conjunt de les transformacions de Lorentz pures i translacions temporals depenen de quatre paràmetres i així la invariància de Q enfront d'aquestes transformacions s'ha de traduir en quatre condicions per a Q i, si (9.7), (9.8) i (9.19) fossin independents, amb les dues equacions (9.9) això faria en total cinc condicions en compte de quatre. A més, cosa completament banal, no podem esperar de treure coses diferents utilitzant dues relacions, $\vec{X}_2 = \vec{X} + \vec{X}_1$ i $\vec{X}_1 = \vec{X}_2 - \vec{X}$, que són completament equivalents.

Mirem el problema que ens hem plantejat en aquest paràgraf des d'un altre punt de vista. Considerem d'entrada una funció $Q = Q(X^2, M, N_1, N_2)$ que es conserva en el temps. Calculem $\mathcal{L}(\vec{K}_j) Q$. D'acord amb (9.6), (9.7), ara serà:

$$(9.22) \quad \mathcal{L}(K_j) Q = - (1-V_2^2)^{1/2} M^{-1} N_1^{-1} \mathcal{L}_1 Q \cdot X^j$$

o bé posant $X_1 = X_2 - X$ en (9.5) (en compte de $X_2 = X + X_1$) com ja hem dit abans

$$(9.23) \quad \mathcal{L}(K_j) Q = - (1-V_1^2)^{1/2} M^{-1} N_1^{-1} \mathcal{L}_2 Q \cdot X^j$$

de manera que l'operador $\mathcal{L}_1$ (respectivament $\mathcal{L}_2$) multiplicat pel factor $-(1-V_2^2)^{1/2} M^{-1} N_1^{-1} X^j = -h_1(1-q)X^j$ (respectivament $-h_2(1-q)X^j$) dona la variació infinitesimal d'una funció dinàmica de X^2, M, N_1, N_2 , invariant en el temps, sota una transformació infinitesimal de Lorentz pura.

X

CONSIDERACIONS FINALS

Després que hem posat les equacions (2) de la M. R. P. en la forma més abordable (5.6), (5.7), hem donat una àmplia família de solucions. Tanmateix la forma general d'aquestes solucions obtingudes no és l'apropiada per a construir una electrodinàmica predictiva o una teoria de la gravitació a l'espai de Minkowski, que són les dues aplicacions de la M. R. P. que hom pot pensar primer. D'altra banda no sembla possible d'obtenir solucions exactes amb $\psi_b \neq 0$ amb bon comportament a l'infinit i en definitiva suficientment realistes, a causa de la complexitat de les equacions (5.6), (5.7) (un sistema quasi-lineal acoblat de quatre equacions diferencials per a quatre funcions de quatre variables), i en qualsevol cas ningú no n'ha trobades fins avui.

Com podem deduir d'allò que hem dit al paràgraf 6, la solució general d'un sistema tal com (5.6), (5.7) és d'una riquesa enorme, de manera que es planteja el problema suplementari de seleccionar, d'aquesta solució general, la solució particular adaptada al problema dinàmic concret que estiguem considerant.

Sembla, doncs, que el problema de trobar una solució física de (5.6), (5.7) ha d'ésser abordat d'una manera aproximada. És el que han fet Bel i col.laboradors [8] [9] [15] desenvolupant les forces $\vec{\mu}_b$ entre dues càrregues en la constant d'acoblament i en el quocient de les masses (suposant la massa de la partícula 1 "molt" més gran que la massa de la partícula 2) respectivament i treballant a diferents aproximacions. L'arbitrarietat que els resta per a les forces, un cop integrades les equacions de la M. R. P. a l'ordre d'aproximació en qüestió, és eliminada exigint compatibilitat amb els potencials de Lienard-Wieckert. El que hom construeix així és l'electrodinàmica predictiva aproximada del problema de dos cossos.

Des d'un altre punt de vista, L. Mas [13] ha agafat els lagrangians de Darwin i d'Einstein-Infeld-Hoffmann (entre d'altres) i ha vist que les forces que s'hi deriven (mòdul V^4/c^4) són relativistes predictives.

Un altre punt de vista des del qual nosaltres comencem a treballar és el següent: desenvolupar en sèrie de potències de X^{-1} , posar $\vec{\psi}_b = \vec{\psi}_b^1 = \vec{\varphi}_b^0 = 0$ (partícules lliures) i prendre com a moment lineal, energia, moment angular i centre de masses per a $X \rightarrow \infty$ les corresponents magnituds del cas de dues partícules lliures. Després, utilitzar simultàniament les equacions de la M. R. P. [equacions (2)] i les fórmules de transformació per Poincaré del moment lineal, energia, etc. [3] a l'ordre d'aproximació en qüestió.

AGRAÏMENT

És un plaer d'agrair des d'aquí a L. Mas, J. Fustero i A. Trias, de la Universitat Autònoma de Barcelona, i a J. Martín i especialment a L. Bel, de la Universitat Autònoma de Madrid, l'estímul de llurs crítiques i observacions referents a aquest treball.

Referències

- [1] D. G. Currie, "Phys. Rev.", *142*, 817 (1966).
- [2] R. N. Hill, "J. Math. Phys.", *8*, 201 (1967).
- [3] L. Bel, "Ann. Ins. H. Poincaré", *14*, 189 (1971).
- [4] R. D. Driver, "Phys. Rev.", *178*, 2051 (1969).
- [5] J. A. Wheeler i R. P. Feynman, "Rev. Mod. Phys.", *17*, 157 (1945).
- [6] J. A. Wheeler i R. P. Feynman "Rev. Mod. Phys.", *21*, 425 (1949).
- [7] J. L. Anderson, Principles of Relativity Physics (Academic Press, New York 1967).
- [8] L. Bel, A. Salas i J. M. Sánchez, "Phys. Rev.", *D 7*, 1099 (1973).
- [9] A. Salas i J. M. Sánchez Ron. "Nuovo Cimento", *20B*, 209 (1974).
- [10] T. F. Jordan, "Phys. Rev.", *166*, 1308 (1968).
- [11] Ph. Droz-Vincent, "Phys. Scripta", *2* 129 (1970).
- [12] R. Arens, "Arch. for rat. Mech. and Analysis", *47*, núm. 4, 246 (1972).
- [13] L. Mas, "C. R. Acad. Sc. Paris", *271*, 206 (1970).
- [14] L. Bel, "Ann. Inst. H. Poincaré", *3*, 307 (1970).
- [15] L. Bel, J. Martín, "Phys. Rev.", *D9*, 2760 (1974).

TAULA

RESUM	7
INTRODUCCIÓ.	7
I. LES EQUACIONS DE LA M.R.P.: DUES PARTÍCULES	11
II. EL FORMALISME QUADRIDIMENSIONAL DE LA M.R.P.	15
III. La M.R.P. I EL GRUP COMPLET DE POINCARÉ	17
IV. LES EQUACIONS DE LA M.R.P. I EL GRUP COMPLET DE POINCARÉ.	19
V. LA INTEGRACIÓ PARCIAL DELS SISTEMES (4.6)-(4.9).	21
VI. LA INTEGRACIÓ DEL SISTEMA (5.6), (5.7).	23
VII. UNA FAMÍLIA PARTICULAR DE SOLUCIONS DE LES EQUACIONS (5.6), (5.7)	25
VIII. LES "SOLUCIONS A UN COS"	31
IX. INTERPRETACIÓ GEOMÈTRICA DELS OPERADORS $\mathfrak{f}_b$	35
X. CONSIDERACIONS FINALS	41
AGRAÏMENT	42
REFERÈNCIES.	42

**ACABAT D'IMPRIMIR A ROMARGRAF, S.A.,
DE L'HOSPITALET DE LLOBREGAT
EL DIA 21 DE DESEMBRE DE 1983**

